MATEMATICĂ BAC

notebune.ro

TEST M2

profesor Daniel PETRICEANU

SUBIECTUL I

1. Considerăm progresia geometrică $(a_n)_{n\geq1}$, de rație 2 astfel încât $a_1 + a_3 = 15$. Determinați a_1.
2. Rezolvați ecuația $[3x] = 2$, unde $x \in \mathbb{R}$.
3. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = 2x$ nu este surjectivă.
4. Demonstrați egalitatea $C_5^3 - C_4^2 = 4$.
5. Considerăm vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + (m-1)\vec{j}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ să fie coliniari.
6. Arătați că $sin\, 50^0\, sin\, 130^0 = cos^2\, 140^0$.

REZOLVARE

1. Avem $a_1 + a_1 q^2 = 5 \Leftrightarrow 5a_1 = 5 \Leftrightarrow a_1 = 1$.
2. $[3x] = 2 \Leftrightarrow 3x \in [2;3) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3};1\right)$.
3. $\exists y = 1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ceea ce este adevărat pentru oricare x număr întreg, deci funcția dată nu este surjectivă. (sau ecuația $f(x) = 1$ nu are soluții intregi)
4. $C_5^2 - C_4^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} - \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} = 4$.
5. $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $-\frac{1}{2} = \frac{m-1}{3}$, de unde obținem $m = -\frac{1}{2}$.
6. $\sin 50^0 \sin 130^0 = \frac{\cos 80^0 - \cos 180^0}{2} = \frac{1+\cos 80^0}{2} = \cos^2 40^0 = (-\cos(180^0 - 40^0))^2 = \cos^2 140^0$

SUBIECTUL II

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Demonstrați că $rang(AB) = 2$.
   b) Demonstrați că $5AB = CA$.
   c) Calculați C^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie mulțimea $G = \{f_a \mid f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_a(x) = ax + a,\ a \neq 0\}$.
   Definim $f_a * f_b = f_{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*$.

   a) Determinați valoarea lui $k \in \mathbb{R}$ pentru care $f_2 * f_{\frac{1}{2}} = f_k$.

   b) Demonstrați că pentru orice funcție $f_a \epsilon G$, f_a este funcție bijectivă.

   c) Calculați inversa funcției $f_a \epsilon G$ in raport cu legea “$*$ ".

REZOLVARE

1. a) $det(AB) \cdot= det(A) \cdot det(B) = 5 \neq 0 \Rightarrow rang(AB) = 2$.

b) $5AB = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$C \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = 5AB$.

c) $CA = 5AB \Rightarrow C = 5 \cdot ABA^{-1} \Rightarrow C^n = 5^n \cdot (ABA^{-1})^n = 5^n(ABA^{-1}) \cdot (ABA^{-1}) \cdot \cdots (ABA^{-1}) =$
$= 5^n \cdot A \cdot B^n \cdot A^{-1}$.

Avem $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (demonstrăm prin inducție) și $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Obținem că $C^n = 5^n \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$= 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} n+5 & n \\ -n & -n+5 \end{pmatrix}$.

REZOLVARE

2. a) $f_2 * f_{\frac{1}{2}} = f_1 = f_a \Rightarrow a = 1$.

b) Fie $y \in \mathbb{R}$; atunci $f_a(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-a}{2} \in \mathbb{R}$ este soluție unică, deci f este funcție bijectivă .

c) Arătăm că $\exists f_e \in G$ astfel încât $f_a * f_e = f_e * f_a = f_a, \forall f_a \in G \Leftrightarrow f_{ae} = f_{ea} = f_a, \forall a \in \mathbb{R}^*$. Obținem că $e = 1 \in \mathbb{R}^*$, deci $f_e = f_1 \in G$, f_1 este elementul neutru al legii " $*$ ".

Determinăm $f_{a'} \in G$ astfel încât $f_a * f_{a'} = f_{a'} * f_a = f_1 \Leftrightarrow f_{aa'} = f_{a'a} = f_1$. Obținem că $a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$, deci $f_{a'} = f_{\frac{1}{a}} \in G$.

SUBIECTUL III

1. Fie $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.
   a) Demonstrați că $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}, \forall x > 1$.
   b) Demonstrați că funcția f nu are derivată în $x = 1$.
   c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 1|$.
   a) Demonstrați că $\int_0^2 f(x)\, dx = 2$.
   b) Calculați $\int_0^2 x\big(f(x)\big)^5\, dx$.
   c) Demonstrați că nu există $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^3-1} \int_0^x f(t)\, dt$.

REZOLVARE

1. a) Pentru $x > 1$, avem $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, iar $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}} \cdot (2x - 1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

b) $f_d'(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \searrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = \lim\limits_{x \searrow 1} \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}} = \infty$.

$f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-1} = -\lim\limits_{x \nearrow 1} \sqrt{\frac{x(x-1)}{(1-x)^2}} = -\infty$. Rezultă că nu există derivata lui f în $x = 1$.

c) Avem $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, $\forall x \in (0;1)$. Egalăm derivata cu zero, obținem $x = \frac{1}{2}$. Din tabelul de variație al funcției f rezultă că f este strict crescătoare pe $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, strict descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ și strict crescătoare pe $[1; \infty)$. Obținem că $x = 0$ este punct de minim local, $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim local, $x = 1$ este punct de minim local.(nu ne-am propus puncte de extrem global)

REZOLVARE

2. a) $\int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}-1=2.$

b). $\int_0^2 x(|x^2-1|)^5\,dx \underset{dt=2xdx}{\overset{t=x^2-1}{=\!=}} \int_{-1}^{3} |t|^5 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left(-\int_{-1}^0 t^5\,dt + \int_0^3 t^5\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{3^6}{6}\right) = \frac{3^6+1}{12}.$

c) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{1}{x^3-1}\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{1}{x^3-1}\int_0^x (1-t^2)\,dt = \lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{x-\frac{x^3}{3}}{x^3-1} = -\infty$, iar $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{1}{x^3-1}\int_0^x f(t)\,dt =$
$\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{1}{x^3-1}\left(\int_0^1 (1-t^2)\,dt + \int_1^x (t^2-1)\,dt\right) = \lim\limits_{x\searrow 1} \frac{1}{x^3-1}\left(\frac{2}{3}+\frac{x^3}{3}-x+\frac{2}{3}\right) = \infty$. De aici rezultă că nu există
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^3-1}\int_0^x f(t)\,dt.$