MATEMATICĂ BAC

notebune.ro

TEST M1

profesor Daniel PETRICEANU

SUBIECTUL I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z = \frac{1}{2-i}$.
2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$. Demonstrați că f nu este funcție injectivă.
3. Rezolvați ecuația $4^x + 3 \cdot 2^x = 4$.
4. Dacă $x_1, x_{2,\dots}, x_{10} \in \{0; 1\}$, determinați numărul soluțiilor ecuației $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 2$.
5. Demonstrați egalitatea $sin\left(2\, arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$.
6. Considerăm punctele $A(1; 3)$ și $B(-1; 1)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

REZOLVARE

1. $z = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \Rightarrow Re(z) = \frac{2}{5}$.
2. Avem $f(0) = f(1) = 0$, rezultă că f nu este funcție injectivă.
3. Notăm $t = 2^x$. Ecuația devine $t^2 + 3t - 4 = 0, \Delta = 25, t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}, t_1 = -4, t_2 = 1$.
   Avem $2^x = -4$ care nu are soluții, respectiv $2^x = 1$, cu soluția $x = 0$.
   Deci, $x = 0$ este unica soluție a ecuației.
4. Deoarece $x_1, x_2, .., x_{10} \in \{0; 1\}$, iar suma lor este 2, atunci două dintre ele vor fi egale cu 1 și celelalte vor fi 0. De aici rezultă că numărul soluțiilor ecuației este $C_{10}^2 = 45$.
5. $sin\left(2\, arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\, sin\left(arcsin\frac{3}{5}\right) cos\left(arcsin\frac{3}{5}\right) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.
6. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, atunci $M(0; 2)$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{-2} = 1$. Fie d mediatoarea segmentului $[AB]$, atunci $d \perp AB \Leftrightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$. Obținem $m_d = -1$, iar ecuația dreptei d este: $y - y_M = m_d(x - x_M) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.

SUBIECTUL II

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 1)$ și $C = A \cdot B$.
   a) Demonstrați că $Tr(C) = 9$.
   b) Demonstrați că $C^n = 9^{n-1} \cdot C, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   c) Demonstrați că $I_4 + C$ este inversabilă și $(I_4 + C)^{-1} = I_4 - \frac{1}{10} \cdot C$.

2. Fie legea de compoziție $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $x, y \in \mathbb{R}$. Admitem că legea de compoziție "$*$" este asociativă.
   a) Demonstrați că $e = 6$ este elementul neutru al legii de compoziție "$*$".
   b) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2022$.
   c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x * y = z \\ z * x = y \\ y * z = x \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{R}$.

REZOLVARE

1. a) $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}(1 \; -1 \; \; 2 \; \; 1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(C) = 9.$

b) $C^2 = (AB) \cdot (AB) = A \cdot (BA)B$, dar $B \cdot A = (1 \; -1 \; \; 2 \; \; 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (9)$, deci $C^2 = 9AB = 9C$.

Presupunem $C^k = 9^{k-1}C$ și demonstrăm că $C^{k+1} = 9^k C$.

$C^{k+1} = C^k \cdot C = 9^{k-1}C \cdot C = 9^{k-1} \cdot 9C = 9^k C$.

Deci, $C^n = 9^{n-1}C, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem $(I_4 + C)\left(I_4 - \frac{1}{10}C\right) = I_4 - \frac{1}{10}C + C - \frac{1}{10}C^2 = I_4 - \frac{1}{10}C + C - \frac{9}{10}C = I_4$.

Analog, $\left(I_4 - \frac{1}{10}C\right)(I_4 + C) = I_4$ (nu este necesar).

Din cele de mai sus, deducem că $I_4 + C$ este inversabilă și $(I_4 + C)^{-1} = I_4 - \frac{1}{10}C$.

REZOLVARE

2. a) $x * e = 6x - 5x - 30 + 30 = x$ și $e * x = 6x - 30 - 5x + 30 = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $e = 6 \in \mathbb{R}$ este elementul neutru al legii de compoziție date.

b) Avem $5 * y = 5y - 25 - 5y + 30 = 5$ și $y * 5 = 5, \forall y \in \mathbb{R}$, de unde deducem că:

$(1 * 2 * 3 * 4) * \big(5 * (6 * 111 * 2022)\big) = (1 * 2 * 3 * 4) * 5 = 5.$

c) Deoarece $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$, sistemul devine: $\begin{cases} (x-5)(y-5) = z - 5 \\ (y-5)(z-5) = x - 5 \\ (z-5)(x-5) = y - 5 \end{cases}$,

sau, notând $x - 5 = a, y - 5 = b, z - 5 = c$, $\begin{cases} ab = c \\ bc = a \\ ca = b \end{cases}$, de unde obținem $(abc)^2 = abc$.

Dacă $a = 0$ atunci $bc = 0$, de unde $b = 0$ sau $c = 0$.

Dacă $b = 0$ atunci $c = 0$.

Dacă $c = 0$ atunci $b = 0$.

Obținem în acest caz că $a = b = c = 0$, adică $x = y = z = 5$ este soluție.

Dacă $a \neq 0$, atunci $bc \neq 0$, deci $abc = 1$, de unde $ab = \frac{1}{c}$.

Atunci $c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$. Analog, $a = \pm 1$ și $b = \pm 1$.

Dacă $a = b = -1, c = 1$, atunci $x = y = 4,\ z = 6$.

Dacă $a = c = -1, b = 1$, atunci $x = z = 4,\ y = 6$.

Dacă $b = c = -1, a = 1$, atunci $y = z = 4,\ x = 6$.

Dacă $a = b = c = 1$, atunci $x = y = z = 6$.Soluțiile sistemului sunt (5;5;5), (4;4;6), (4;6;4), (6;4;4), (6;6;6).

SUBIECTUL III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{2x^4+6}$.
   a) Demonstrați că $f'(x)=\frac{6(1-x^4)}{(2x^4+6)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
   b) Determinați mulțimea valorilor funcției f.
   c) Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{4}|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

2. Considerăm $I(n;j)=\int_0^1\left(1-x^j\right)^n dx\,, n,j\in\mathbb{N}^*$.
   a) Demonstrați că $I(1;1)=\frac{1}{2}$.
   b) Utilizând, eventual, metoda integrării prin părți, demonstrați că:
   $I(n;j)=\frac{nj}{1+nj}I(n-1;j), \forall n,j\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.
   c) Demonstrați că $I(n;n)=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

REZOLVARE

1. a) $f'(x) = \frac{2x^4+6-x\cdot 8x^3}{(2x^4+6)^2} = \frac{6-6x^4}{(2x^4+6)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ sunt punctele critice ale funcției f.

x	$-\infty$		- 1		1		∞
f'	$-$	0	$+$	0	$-$		
f	0	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

Din tabelul de variație, rezultă că $Im(f) = \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$.

c) Pentru $x = y$, inegalitatea este evidentă.

Pentru $x \neq y$, fie $x < y$. Funcția este derivabilă pe $[x, y]$, deci există $c \in (x, y)$ astfel încât

$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x|$.

Dar $|f'(x)| = \left|\frac{6-6x^4}{(2x^4+6)^2}\right| \leq \frac{6+6x^4}{(2x^4+6)^2} = \frac{6+6x^4}{4x^8+24x^4+36} < \frac{6+6x^4}{24x^4+24} = \frac{1}{4} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} \cdot |x - y|$.

REZOLVARE

2. a) $I(1;1)=\int_0^1(1-x)\,dx=x|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

b) $I(n;j)=\int_0^1\left(1-x^j\right)^n dx=\int_0^1 x'\left(1-x^j\right)^n dx=$

$=x\left(1-x^j\right)^n\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot n\left(1-x^j\right)^{n-1}\left(-jx^{j-1}\right)dx=nj\int_0^1 x^j\left(1-x^j\right)^{n-1}dx=$

$=-nj\int_0^1\left(1-x^j-1\right)\left(1-x^j\right)^{n-1}dx=-nj\left(\int_0^1\left(1-x^j\right)^n dx-\int_0^1\left(1-x^j\right)^{n-1}dx\right)=$

$=-nj\cdot I(n;j)+nj\cdot I(n-1;j)\Rightarrow(nj+1)\cdot I(n;j)=nj\cdot I(n-1;j)\Rightarrow$

$\Rightarrow I(n;j)=\frac{nj}{nj+1}\cdot I(n-1;j).$

c) Avem $I(k;n)=\frac{nk}{1+nk}\cdot I(k-1;n),\forall k\in\overline{2,n}$. Atunci $\prod_{k=2}^n I(k;n)=\prod_{k=2}^n\frac{nk}{1+nk}\cdot I(k-1;n)$.

Dar $I(k;n)\neq 0,\forall n\geq 2,\forall k\in\mathbb{N}^*(deoarece\ I(k;n)>0)$ și prin simplificare în cele două produse, obținem:

$I(n;n)=\frac{n^2}{1+n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{1+n(n-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{1+2n}\cdot I(1;n)$, unde $I(1;n)=\int_0^1(1-x^n)\,dx=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

Atunci $I(n;n)=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$.